# Обозначения:

**Формулы:**

# 3.1

3.2.2. Математическая постановка

Установившийся режим колебаний означает, что зависимость всех характеристик задачи (перемещения, напряжения и др.) от времени t описывается множителем () . В силу линейности задачи данный множитель можно сократить и в дальнейшем работать только с комплексными амплитудами соответствующих величин, не оговаривая этого особо. Например, Re[u.(ic,y,2)e~U,t] – вектор перемещений точек среды. В дальнейшем работаем только с вектором , называя его также вектором перемещений (подробнее эти вопросы см. в КЗ).

Вектор перемещений характеризует отклонение каждой точки тела от начального положения, компоненты его и,у, ЬХ являются непрерывными функциями координат. Векторные величины здесь и далее обозначаются чертой сверху; предполагается, что векторы являются векторами-столбцами. Наряду с традиционными обозначениями в тех случаях, когда необходима тензорная запись, мы будем пользоваться цифровой индексацией координатных осей и соответствующих компонент векторов и тензоров: а={ае0а:а,ге3}, й.={цА,и.г,из} и т. п.

Механическое состояние упругого тела характеризуется компонентами тензоров деформаций и напряжений бу /9/, которые в линейной теории упругости связаны уравнениями движения

(3.1)

соотношениями обобщённого закона Гука

(3.2)

и геометрическими соотношениями Коши

(3.3)

Здесь F = 1^, Fj} - вектор объёмных сил, Р — плотность, - коэффициенты упругости материала. Как обычно в тензорной записи предполагается суммирование по одинаковым индексам и используется обозначение для производных по координатам в виде

Вектор напряжений Т={\*£,: ,Та/Е“3^ f возникающих в упругом теле на некоторой элементарной площадке с нормалью η·={.η1,π»»π3}» выражается через компоненты тензора напряжений

(3.4)

В изотропном случае, когда упругие свойства тела одинаковы во всех направлениях, закон Гука (3.2) выражается только через две независимые константы \ f и, (константы Ляме):

(3.5)

Учитывая (3.3)-(3,5), напряжения Т можно выразить через перемещения f ZL в виде Έ « Τ· ΰ. , где Τ - линейный дифференциальный оператор. В изотропном случае

Так как

Поэтому

Для установившихся гармонических колебаний инерционный членР w в (3.1) принимает вид — рогй. Подстановка соотношений(3.5), (3.3) в уравнения (3.1) приводит к уравнениям относительно вектора перемещений ϋ , называемым уравнениями Ляме /9/

Учитывая, что , подставим 3.3 и 3.5 в 3.1:

(3.9)

+граничные условия 3.10, 3.11:

при

Итак, относительно неизвестных перемещений й имеем краевую задачу (3.9)-(3.п).

# 3.2

Применим преобразование Фурье к 3.9 и 3.10:

(3.12)

Из 3.10 с учётом 3.7:

(3.13)

Возьмём замену

(3.14)

В трансформантах:

(3.15)

Подставим 3.15 в 3.12:

(3.16)

Далее:

(3.17,3.18)

И для граничных условий:

(3.19,3.20)

Пусть

Тогда задачи 3.16-3.20 примут вид:

(3.22)

Где

,,, ,

Проверка:

# 3.3

3.3. Построение общего решения полученных систем

Итак, имеем две краевые задачи (3.22) для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Общее решение таких систем в случае отсутствия кратных собственных значений может быть выписано в виде

(3.23)

здесь N - размерность системы, - собственные значения, а тк соответствующие им собственные векторы матрицы системы, -неизвестные константы, определяемые из N граничных условий. Конкретно для первой задачи N=4,

(3.24)

(3.25)

(3.26)

(3.27)

(3.28)

Найдём вид собственных значений и векторов из уравнений (3.24), (3.25) И (3.27), (3.28).

I. Раскроем определитель (3.24):

Причём

В новых обозначениях у-е принимает вид:

(3.30)

Распишем систему 3.25:

(3.31)

Уравнения (3.31) в силу (3.24) линейно зависимы, пользоваться можно только одним из них, зафиксировав одно из неизвестных и выразив остальные через него.

Для различных, к имеем

Для матрицы В:

(3.33)

Тогда:

Неизвестные константы tK>6. в (3.23), (3.26) определяются из условий цри\_ 2=0 и 2'♦-ов. Последние выполняются, если Y6M),X(of.3)-\*0 при 2-»-оо. (3.35)

Проанализируем поведение экопонент в DC(<J,Z),Y(c(,Z) при 2—>-оо. Для раадой из них при Ы - вещественных выделяется два случая: '\_\_\_\_\_(

1) |ol| >аек, ё^АА~\*гк-вещественная,

2) МКэек, dK - чисто мнимая.

С(к Ж П

В первом случае е —>11, в —>оо при 2-\*-во и дам

выполнения условий (3.35) необходимо положить Три остальные константы однозначно определяются из орех уо-

ловий при 2 = 0.

Во втором случае экспонента становится осциллирующей, не имеющей предела при г —\*·-оо 1 при V 2), однако анализ их

вклада в окончательное решение U.(ат,^,г) показывает, что он стремится к нулю при Z-9-oo как для ed,cZ, так и для /X/,

Следовательно, для Ml <эек при обеих экспонентах e±<S\*Zконстанты M0I7T быть ненулевыми, что не противоречит условию (З.П).

Таким образом, число ненулевых констант становится больше трех, и из условий при 2 = 0 они определяются неоднозначно - решение становится неединственным\*.

Для выделения единственного решения формулируются дополнительныв уоловня, которые принято называть условиями или принципами излучения, Формулировка различных принципов и техника их применения подробно описаны в Д7· Так как в случае однородного полупространства вое они эквивалентны, воспользуемся наиболее простым и фшзяческя наглядным принципом Зоммерфельда, в соответствия с которые требуется, чтобы в решении оставались только те составляющие, которые описывают распространение волн от источника на бесконечность. . ^

Учитывая опущенный ранее множитель еГ , убеждаемся, что при |oU<aeK e±^<z~Ujt списывает плоскую волну, уравнение распространения которой дает условие постоянства фазы

±Ттёк-2- cot=CO+virt. (3.36)

Пполж&Ьевенпкровав уравнение (3.36) по времени ί , считая, что

В соответствии о принципом Зоммерфельда фазовая скорость должна быть отрицательной ( ось 2 направлена вверх), поэтому, слагаемые, содержащие экспоненты ST\* должны быть отброшены, так как они описывают волны, идущие к источнику из глубины. Следовательно, ta=t<=Sa=D и для | оЦ < аек ·

# 3.4

Итак,

(3.37)

и осталось определить неизвестные , tj, из граничных условий при 2=0 (см.(3.22)).

(3.38)

(3.39)

Следующие векторы удовлетворяют уравнениям и граничным условиям 3.22:

(3.40)

(3.41)

,

По правилу Крамера

(3.42)

(3.43)

Из 3.39 следует для

(3.44)

Учитывая 3.15 и 3.40:

(3.45)

(3.46)

(3.47)

Контуры интегрирования liflz почти всаду совпадают с вещественной осью, отклоняясь от нее в комплексную плоскость только при обходе вещественного полюса £ функций М,Р, R,g. Такой выбор контуров диктуется условиями излучения Д/. Полюс ξ является ' единственным вещественным корнем уравнения Релея

Д(Ы)= -(Ыг-0.5хгУ+о12^г,

(3.47)

его вклад в решение (вычет (3.46) в данном полюсе) определяет волну Релея, распространяющуюся вдоль поверхности упругого полупространства от области приложения нагрузки. Матрица ,в (3.46) называется матрицей Грина упругого полупространства по аналогии с функцией Грини для неоднородных дифференциальных уравнений. Известно /ВУ, что функция Грина ff(x) уравнения />u=f (Z - дифференциальный оператор) определяется как решение уравнения £>$=$ (5 - & - функция Дирака). Свертка у (а) с правой частью £(х) является частным решением исходного уравнения!

Аналогично столбцами матрицы ft являются векторы перемещений, вызванные в полупространстве сосредоточенными поверхностными нагрузками m=1,2,3, направленными вдоль коорди-

натных осей ( координатные орты), а перемещение а, вызванное произвольной нагрузкой η, выражается сверткой ки-Ц, (3.46).

Матрица К(с^,о^,3) является преобразованием Фурье от по о.,у·; в соответствии с терминологией теории псевдодифферен-циальных операторов ее называют также символом матрицы к. Переход от К к ft. в (3.46) осуществляется путем подстановки Q=GT[^] и замены порядка интегрирования.